Corrigés chap. 8 ELASTICITE

Exercice 8.1 : contraintes et déformations planes

$$\sigma_{ij} = \lambda\, \varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \text{ avec } 2\mu = \frac{E}{1+\nu} \text{ et } \lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}$$

1.Trace du tenseur des contraintes.

$$\mathrm{Tr}\sigma = 3\lambda\, \mathrm{Tr}\varepsilon + 2\mu \mathrm{Tr}\varepsilon = (3\lambda + 2\mu)\mathrm{Tr}\varepsilon \text{ avec } 2\mu = \frac{E}{1+\nu} \text{ et } \lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}$$

$$\mathrm{Tr}\sigma = 3\lambda\, \mathrm{Tr}\varepsilon + 2\mu \mathrm{Tr}\varepsilon = \frac{E}{1-2\nu}\mathrm{Tr}\varepsilon$$

2.Tenseur des déformations.

$$\sigma = \lambda \mathrm{Tr}\varepsilon\, I + 2\mu\varepsilon \text{ donc } \varepsilon = \frac{\sigma}{2\mu} - \frac{\lambda}{2\mu}\mathrm{Tr}\varepsilon\, I \text{ avec } 2\mu = \frac{E}{1+\nu} \text{ et } \lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}$$

$$\mathrm{Tr}\sigma = \frac{E}{1-2\nu}\mathrm{Tr}\varepsilon \text{ soit } \mathrm{Tr}\varepsilon = \frac{1-2\nu}{E}\mathrm{Tr}\sigma$$

$$\varepsilon = \frac{1+\nu}{E}\sigma - \frac{\nu}{E}\mathrm{Tr}\sigma\, I$$

3.Déformations planes

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \sigma = \lambda\, \varepsilon_{kk} I + 2\mu\varepsilon = \begin{pmatrix} \lambda(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}) + 2\mu\varepsilon_{xx} & 2\mu\varepsilon_{xy} & 0 \\ 2\mu\varepsilon_{xy} & \lambda(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}) + 2\mu\varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}) \end{pmatrix}$$

On remarque que la contrante selon z n'est pas nulle.

4.Contraintes planes

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \varepsilon = \frac{1+\nu}{E}\sigma - \frac{\nu}{E}\mathrm{Tr}\sigma\, I = \begin{pmatrix} \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xx} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}) & \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy} & 0 \\ \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy} & \frac{1+\nu}{E}\sigma_{yy} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}) \end{pmatrix}$$

On remarque que la déformation selon z n'est pas nulle.

Exercice 8.5 : Disque de faible épaisseur en rotation

On considère un disque de faible épaisseur, limité par les rayons R1 et R2. Celui-ci est en rotation autour de son axe à une vitesse angulaire constante ω. Nous nous proposons de calculer le champ de déformation élastique du disque dans l'hypothèse des contraintes planes et d'un milieu élastique isotrope. On néglige la gravité et on se placera en coordonnées cylindriques. De par l'hypothèse des contraintes planes et la géométrie du problème, le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_r & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sur les faces supérieures et inférieures du disque, la contrainte σ_{zz} vaut zéro (pas de pression imposée) et comme le disque est de faible épaisseur, on peut supposer que σ_{zz} vaut zéro dans l'épaisseur du disque : on est donc bien en contrainte plane. De plus, il y a invariance des contraintes selon l'angle θ. Ainsi, σ ne dépend que de r.

1 Exprimer les efforts volumiques dus aux forces centrifuges dans le disque en rotation en considérant un élément de volume autour d'une position r

Un petit élément dV de matière de masse m subit une accélération centrifuge $mr\omega^2\vec{e}_r$. Rapportée au volume, cette force correspond à une densité de force volumique $f_v = mr\omega^2\vec{e}_r / dV = \rho r\omega^2\vec{e}_r$

2 Ecrire l'équation de la statique et en déduire l'équation différentielle vérifiée par les composantes du champ des contraintes.

la statique, $\overrightarrow{\mathrm{div}\sigma} + \vec{f}_v = \vec{0}$, donne selon $\vec{e}_r$: $\dfrac{d\sigma_r}{dr} + \dfrac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho r\omega^2 = 0$ puisque $\sigma = \sigma(r)$

3 De par la symétrie du problème et du fait que le disque est de faible épaisseur, le champ de déplacement radial n'est fonction que de r : $u_r = u_r(r)$. Ecrire alors les composantes du tenseur des déformations.

$$u_r = u_r(r) \text{ donc } \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_r & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} du_r/dr & 0 & 0 \\ 0 & u_r/r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4 Utiliser la relation (8.32) pour lier entre elles les composantes radiale et orthoradiale des déformations et des contraintes.

$$\varepsilon = \frac{1+\nu}{E}\sigma - \frac{\nu}{E}\mathrm{tr}\sigma I = \frac{1}{E}\begin{pmatrix} (1+\nu)\sigma_r - \nu(\sigma_r+\sigma_\theta) & 0 & 0 \\ 0 & (1+\nu)\sigma_\theta - \nu(\sigma_r+\sigma_\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -\nu(\sigma_r+\sigma_\theta) \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\begin{pmatrix} \sigma_r - \nu\sigma_\theta & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta - \nu\sigma_r & 0 \\ 0 & 0 & -\nu(\sigma_r+\sigma_\theta) \end{pmatrix} \text{ ainsi, } \sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta) \text{ et } \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r)$$

NB : le terme ε_{zz} non-nul permettra de calculer le déplacement selon z qui est ignoré dans le plan médian du disque.

5 Montrer alors que le champ de déplacement doit satisfaire $\dfrac{d^2u_r}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{du_r}{dr} - \dfrac{u_r}{r^2} = \dfrac{\nu^2-1}{E}\rho\omega^2 r = -Kr$ où K est une constante du problème.

l'éq. de la statique, $\dfrac{d\sigma_r}{dr} + \dfrac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho r\omega^2 = 0$, devient $\dfrac{E}{1-\nu^2}\left(\dfrac{d\varepsilon_r}{dr} + \nu\dfrac{d\varepsilon_\theta}{dr}\right) + \dfrac{E}{1-\nu^2}\left(\dfrac{(\nu-1)\varepsilon_\theta + (1-\nu)\varepsilon_r}{r}\right) + \rho r\omega^2 = 0$

il vient $\dfrac{d\varepsilon_r}{dr} + \nu\dfrac{d\varepsilon_\theta}{dr} + \dfrac{1-\nu}{r}(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta) + \dfrac{1-\nu^2}{E}\rho r\omega^2 = 0$, soit $\dfrac{d^2u_r}{dr^2} + \nu\dfrac{d(u_r/r)}{dr} + \dfrac{1-\nu}{r}\left(\dfrac{du_r}{dr} - \dfrac{u_r}{r}\right) + \dfrac{1-\nu^2}{E}\rho r\omega^2 = 0$

ou encore $\dfrac{d^2u_r}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{du_r}{dr} - \dfrac{u_r}{r^2} = \dfrac{\nu^2-1}{E}\rho\omega^2 r = -Kr$ avec $K = \dfrac{1-\nu^2}{E}\rho\omega^2$

6 Intégrer cette équation différentielle en remarquant que $\dfrac{d^2u_r}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{du_r}{dr} - \dfrac{u_r}{r^2} = \dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}(ru_r)\right)$ et en déduire l'expression du champ de déplacement, des déformations et enfin des contraintes.

$$\frac{d^2u_r}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du_r}{dr}-\frac{u_r}{r^2}=\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ru_r)\right)=-Kr \text{ donne } \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ru_r)\right)=-K\frac{r^2}{2}+A$$

$$\frac{d}{dr}(ru_r)=-K\frac{r^3}{2}+Ar\,,\ ru_r=-K\frac{r^4}{8}+A\frac{r^2}{2}+B\,,\ u_r=-K\frac{r^3}{8}+A\frac{r}{2}+\frac{B}{r}$$

7 Déterminer les constantes d'intégration à l'aide des conditions limites en r = R1 et r = R2 et considérer le cas où R1 est nul.

$$\sigma_r=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_r+\nu\varepsilon_\theta\right) \text{ vaut 0. en } r=R_1 \text{ et } r=R_2 \text{ donc } \left(\varepsilon_r+\nu\varepsilon_\theta\right) \text{ vaut 0. en ces 2 points}$$

$$\varepsilon_r+\nu\varepsilon_\theta=du_r/dr+\nu\left(u_r/r\right)=\ -3K\frac{r^2}{8}+\frac{A}{2}-\frac{B}{r^2}+\nu\left(-K\frac{r^2}{8}+\frac{A}{2}+\frac{B}{r^2}\right)$$

$$\varepsilon_r+\nu\varepsilon_\theta=-K(3+\nu)\frac{r^2}{8}+(1+\nu)\frac{A}{2}+\frac{B}{r^2}(-1+\nu)=0. \text{ en } r=R_1 \text{ et } r=R_2$$

$$-K(3+\nu)\frac{R_1^2}{8}+(1+\nu)\frac{A}{2}+\frac{B}{R_1^2}(-1+\nu)=0. \text{ et } -K(3+\nu)\frac{R_2^2}{8}+(1+\nu)\frac{A}{2}+\frac{B}{R_2^2}(-1+\nu)=0.$$

$$\text{donnent } A=\frac{\rho\omega^2}{4E}(3+\nu)(1-\nu)(R_1^2+R_2^2) \text{ et } B=\frac{\rho\omega^2}{8E}(3+\nu)(1+\nu)R_1^2R_2^2$$

Quand R_1 tend vers 0 (disque plein de rayon extérieur R_2), A tend vers $\frac{\rho\omega^2}{4E}R_2^2(3+\nu)(1-\nu)$

et $B=\frac{\rho\omega^2}{8E}(3+\nu)(1+\nu)R_1^2R_2^2$ tend vers 0. ce qui fait disparaitre le terme en B/r dans u_r

Exercice 8.9 : déformation thermique lors d'un chauffage quelconque

On considère un barreau libre de longueur L_0 à la température uniforme T_0 = 20°C au temps t = 0. On se propose de calculer la longueur du barreau lorsqu'il est chauffé et que sa température devient $T(x,t) > T_0$ pour x variant de l'une à l'autre de ses extrémités. On restera dans l'hypothèse des petites déformations, i.e. le coefficient d'expansion thermique α du matériau reste suffisamment petit.

1. Exprimer la nouvelle longueur d'un petit segment de longueur dx autour de la position x lors du passage de la température T_0 à la température $T(x,t) > T_0$ au temps t.

Le segment dx s'allonge de $\alpha(T(x,t)-T_0)dx$ et sa longueur devient alors $dx + \alpha(T(x,t)-T_0)dx=dx\,(1 + \alpha(T(x,t)-T_0))$

2. Sommer alors les nouvelles longueurs de chacun des petits segments du barreau pour calculer la longueur totale du barreau au temps t.

$$L(t)=\int_0^{L_0}\left(1+\alpha(T(x,t)-T_0)\right)dx$$

3. La seconde extrémité du barreau est portée à $T_1 > T_0$ alors que la première extrémité reste à T_0. Calculer le champ de température T(x) puis la longueur du barreau en régime thermique stationnaire, i.e. sous un gradient thermique uniforme et constant.

$$\text{en régime stationnaire, } T(x)=T_0+\frac{T_1-T_0}{L_0}x \quad \text{pour x variant de 0 à } L_0$$

$$\text{et } L=\int_0^{L_0}\left(1+\alpha(T-T_0)\right)dx=\int_0^{L_0}\left(1+\alpha\frac{T_1-T_0}{L_0}x\right)dx=L_0+\alpha\frac{T_1-T_0}{2L_0}L_0^2=L_0\left(1+\alpha\frac{T_1-T_0}{2}\right)$$

4. Comparer cet allongement au cas où tout le barreau est chauffé à T1.

Si tout le barreau avait été chauffé à T1 on aurait un allongement double :

$$T(x)=T_1 \text{ pour x variant de 0 à } L_0 \text{ et } L=\int_0^{L_0}\left(1+\alpha(T_1-T_0)\right)dx=L_0\left(1+\alpha\left(T_1-T_0\right)\right)$$